



VEDIC MATHEMATICS



8



ब्रह्मगुप्त



महावीरचार्य

वैदिक गणित

द्वितीय संस्करण की भूमिका

वैदिक गणित की पाठ्यक्रम के अनुसार कक्षाशः पुस्तकें काफी उपयोगी सिद्ध हुई हैं। इस हेतु लेखक मण्डल के लोग अत्यन्त आभारी हैं। प्रथम संस्करण में कुछ सुधार करने की आवश्यकता हुई जिससे 13-01-2016 को कुरुक्षेत्र में श्री राकेश भाटिया (प्रान्त प्रमुख वैदिक गणित, हरियाणा), श्री गुलशन छाबड़ा (प्रान्त वैदिक गणित सह-प्रमुख, हरियाणा), श्री राजेन्द्र कुमार (प्रान्त वैदिक गणित प्रमुख, दिल्ली), श्री राकेश मलिक (सह प्रान्त वैदिक गणित प्रमुख, दिल्ली) और श्री गोपाल दास शर्मा (हिमाचल) उत्तर क्षेत्र वैदिक गणित प्रमुख, विद्या भारती उत्तर क्षेत्रीय मन्त्री श्री सुरेन्द्र अत्री के मार्गदर्शन में बैठे थे।

वैदिक गणित की इस पुस्तक में मूल रूप से परिवर्तन नहीं किया गया है। कुछ सुधार किया गया है तथा 16/12/2018 को वैदिक गणित की उत्तर क्षेत्र की टोली की बैठक कुरुक्षेत्र में हुई जिसमें वैदिक गणित की पुस्तकों का लेखन कार्य हिंदी व अंग्रेजी दोनों भाषाओं में किया गया। इसमें श्री देवेन्द्र सिंह यादव (सह प्रान्त प्रमुख, दिल्ली), श्री विकास शर्मा (प्रान्त टोली सदस्य, हरियाणा), श्रीमती मंजुला (प्रान्त टोली सदस्य, हरियाणा), श्री महेश चंद शर्मा (प्रान्त प्रमुख, पंजाब), श्री कांशी नाथ रैना (प्रान्त प्रमुख, जम्मू-कश्मीर) का सहयोग भी प्राप्त हुआ।

पुस्तक में सुधार करने के लिए यथासम्भव प्रयास किए गए हैं फिर भी यदि किसी सुधार की आवश्यकता ध्यान में आए अथवा अन्य कोई सुझाव हो तो निश्चित ही दें ऐसा अनुरोध है।

गोपाल दास शर्मा
क्षेत्रीय वैदिक गणित प्रमुख
विद्या भारती उत्तर क्षेत्र

लेखक मण्डल

गोपाल दास शर्मा	क्षेत्रीय वैदिक गणित प्रमुख, विद्या भारती, उत्तर क्षेत्र कुरुक्षेत्र
राकेश भाटिया	वैदिक गणित प्रान्त प्रमुख, विद्या भारती हरियाणा, कुरुक्षेत्र
राजेन्द्र पाल शर्मा	प्रान्त वैदिक गणित प्रमुख, विद्या भारती, दिल्ली
राकेश मलिक	प्रान्त वैदिक गणित सह-प्रमुख, विद्या भारती, दिल्ली
गुलशन छाबड़ा	प्रान्त वैदिक गणित सह-प्रमुख, विद्या भारती हरियाणा, कुरुक्षेत्र

वैदिक गणित के सोलह सूत्र एवं उनके अर्थ

1. एकाधिकेन पूर्वेण - पहले से एक अधिक के द्वारा।
By one more than the previous one.
2. निखिलं नवतश्चरमं दशतः - सभी नौ में से परन्तु अन्तिम दस में से।
All from nine and last from ten.
3. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् - सीधे (खड़े) और तिरछे दोनों प्रकार से।
Vertically and Crosswise.
4. परावर्त्य योजयेत् - पक्षान्तरण कर उपयोग करें।
Transpose and apply.
5. शून्यं साम्यसमुच्चये - समुच्चय समान होने पर शून्य होता है।
When the 'Samuchaya's are the same, that 'Samuchaya' is zero.
6. (आनुरूप्ये) शून्यमन्यत् - अनुरूपता होने पर दूसरा शून्य होता है।
If one is in ratio, the other one is zero.
7. संकलनव्यवकलनाभ्याम् - जोड़कर और घटाकर।
By addition and subtraction.
8. पूरणपूरणाभ्याम् - अपूर्ण को पूर्ण करके।
By completing.
9. चलनकलनाभ्याम् - चलन-कलन के द्वारा
Sequential Motion (By Calculus)
10. यावदूनम् - जितना कम है अर्थात् विचलन।
The Deficiency
11. व्यष्टिसमष्टिः - एक को पूर्ण और पूर्ण को एक मानते हुए।
Whole as one and one as whole.
12. शेषाण्यङ्केन चरमेण - अंतिम अंक से अवशेष को।
Remainder by the last digit.
13. सोपान्त्यद्वयमन्त्यम् - अन्तिम और उपान्तिम का दुगुना।
Ultimate and twice the penultimate.
14. एकन्यूनेन पूर्वेण - पहले से एक कम के द्वारा
By one less than the Previous one.
15. गुणितमुच्चयः - गुणितों का समुच्चय।
The whole Product is same
16. गुणकसमुच्चयः - गुणकों का समुच्चय।
Set of Multipliers, Collectivity of multipliers .

उपसूत्र

1. आनुरूप्येण - नुरुपता के द्वारा।
Proportionately.
2. शिष्यते शेषसंज्ञः - बचे हुए को शेष कहते हैं।
The remainder is the constant
3. आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन - पहले को पहले से, अंतिम को अंतिम से।
First by the first and last by the last.
4. केवलैः सप्तकं गुण्यात् - क, व, ल से 7 का गुणा करें।
Multiply 'ka' (1), 'va' (4), 'la' (3) by 7 (Formula for 1/7).
5. वेष्टनम् - विभाजनीयता परीक्षण की एक विशिष्ट क्रिया का नाम
The osculation. (A method for divisibility test.)
6. यावदूनं तावदूनम् - जितना कम उतना और कम।
What ever deficiency further lessen that much.
7. यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्ग - जितना कम उतना और कम करके वर्ग की योजना च योजयेत् भी करें।
Lesser by the deficiency and add its square.
8. अन्त्ययोर्दशकेऽपि - अंतिम अंको का योग दस।
Sum of last digits is ten.
9. अन्त्ययोरेव - केवल अंतिम द्वारा।
Only by the last.
10. समुच्चयगुणितः - सर्व गुणन।
Product of whole.
11. लोपनास्थापनाभ्याम् - विलोपन एवं स्थापना द्वारा।
By Elimination and retention.
12. विलोकनम् - अवलोकन द्वारा।
By observing.
13. गुणितसमुच्चयः समुच्चयगुणित - गुणांक के समूहों का गुणनफल और गुणनफल के गुणांको को योग समान होगा।
Product of the whole is equal to whole of the product.

अन्य विशिष्ट संकल्पनाएँ -

1. द्वन्द्वयोग - द्वयात्मक। (Duplex)
2. शुद्ध - शोधित राशि। (Purity)
3. ध्वजांक - घात के स्थान का अंक। (Flag digit)

कक्षा - अष्टमी

अनुक्रमणिका

क्रमांक	विषय	पृष्ठ क्रमांक
1.	वर्ग (Square)	5
2.	वर्गमूल (Squareroot)	10
3.	घन (Cube)	16
4.	घनमूल (Cube Root)	20
5.	बीजगणितीय भाग (Division of Algebraic Expressions)	23
6.	रैखिक समीकरणों का हल (Solution of Linear Equations in one Variable)	25
7.	बीजगणितीय गुणन (Multiplication of Algebraic Expressions)	26
8.	बीजगणितीय गुणनखण्ड (Factorization of Algebraic Expressions)	28
9.	क्षेत्रमिति (Geometry)	33
10.	चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)	37
11.	भारतीय गणितज्ञ-ब्रह्मगुप्त (Indian Mathematician-Brahmgupt)	40
12.	भारतीय गणितज्ञ-महावीराचार्य (Indian Mathematician-Mahaviracharya)	45

1.1 परिचय :- किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त उत्तर उस संख्या का वर्ग होता है।

$$5 \text{ का वर्ग} = 5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$25 \text{ का वर्ग} = 25^2 = 25 \times 25 = 625$$

1.1 Introduction : When the number is multiplied itself, the obtained result is the square of the number

$$\text{Square of } 5 = 5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$\text{Square of } 25 = 25^2 = 25 \times 25 = 625$$

1.2 वर्ग करने के लिए वैदिक गणित सूत्र :- 'यावदूनं तावदूनम् वर्गं च योजयेत'

जगद्गुरु शंकराचार्य स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ के द्वारा रचित इस सूत्र का अर्थ है संख्या आधार से जितनी कम या अधिक मात्रा में हो उस संख्या से उतना कम या अधिक कर उसमें वर्ग की भी योजना करें। इस सूत्र में आधार लेते हैं :- 10, 100, 1000, 10000 आदि। यदि 107 का वर्ग करना है तो 100 इसका आधार हुआ और 7 विचलन।

1.2 Vedic Mathematics Sutra for Squaring : Yovadunam Tavadunam Vargan ch Yojayete.

According to the father of Vedic mathematics, the meaning of the sutra : excess and deficit is added and subtracted respectively. The bases are 10, 100, 1000, 10000 etc. If we want to square 107, the base of 107 is 100 and deviation is 7.

उदाहरण / Example 1 हल करें / Solve 107^2

$$\begin{aligned} \text{हल / Solution} &= (107+7)/(7)^2 \\ &= 114 / 49 = 11449 \end{aligned}$$

उदाहरण / Example 2 हल करें / Solve 105^2

$$\begin{aligned} \text{हल / Solution} &= (105+5)/(5)^2 \\ &= 110 / 25 = 11025 \end{aligned}$$

उदाहरण / Example 3 हल करें / Solve 104^2

$$\begin{aligned}\text{हल / Solution} &= (104+4)/(4)^2 \\ &= 108 / 16 = 10816\end{aligned}$$

इस विधि के अनुसार उदाहरण (1) में विचलन 7 है तो उत्तर के बायें भाग में 107 में 7 जोड़ देते हैं और दायें भाग में 7 का वर्ग कर देते हैं। इसी प्रकार उदाहरण (2) में 105 में 5 जोड़े, और बायें भाग में 5 का ही वर्ग करें।

According to this method, In example 1, deviation 7 is added to number 107 in the left part of answer and 7 is squared for the right part of the answer. In example 2 also add 5 in 105 in left part of the answer and square of 5 in the right part of the answers.

उदाहरण / Example 4 :- हल करें / Solve 102^2

$$\begin{aligned}\text{हल / Solution} &= (102+2)/(2)^2 \\ &= 10404\end{aligned}$$

दायें भाग में उत्तर आधार में 0 की संख्या के अनुसार लिखा जायेगा। यदि आधार में दो शून्य हैं, तो दायें भाग में दो अंक ही आने चाहिए। यदि आधार में तीन शून्य हैं तो दायें भाग तीन अंकों का ही आना चाहिए

Answer in the right part of the answer is written according to the number of zero's in the base. If there are two zero's in the base, there must be two digits in the right part. If there are three zero's in the base, then there must be three digits in the right part of the answer.

उदाहरण / Example 5 :- हल करें / Solve 97^2

$$\begin{aligned}\text{हल / Solution} &= (97-3)/(3)^2 \\ &= 9409\end{aligned}$$

उदाहरण / Example 6 :- हल करें / Solve 995^2

$$\begin{aligned}\text{हल / Solution} &= (995-5)/(5)^2 \\ &= 990\ 025\end{aligned}$$

उदाहरण / Example 7 :- हल करें / Solve 985^2

$$\begin{aligned}\text{हल / Solution} &= (985-15)/(15)^2 \\ &= 970\ 225\end{aligned}$$

यदि संख्या आधार से कम है तो विचलन को घटा देते हैं। 97 में विचलन 3 है अतः उत्तर के बायें भाग में विचलन को घटा देते हैं और उत्तर के दाएं भाग में विचलन का वर्ग कर देते हैं।

If the number is less than base, the deviation is subtracted from the right part of answer. In 97 deviation is 3. Hence 3 is subtracted from the left part and deviation is squared for the right part of answer.

1.3 द्वन्द्व योग विधि से वर्ग निकालना (Square using Duplex Method)

सर्व प्रथम संख्याओं का द्वन्द्वयोग करने का अभ्यास करेंगे। उसके पश्चात् द्वन्द्व योग परिणामों से वर्ग करेंगे।

Let us practice of finding the duplex. After that the number will be square using duplex

एक अंक की संख्या का द्वन्द्व योग = अंक का वर्ग करें।

Duplex of one digit = Do square of the digit

उदाहरण : 5 का द्वन्द्व योग = $(5)^2 = 25$

Example : Duplex of 5 = 25

दो अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग = (दोनों अंकों की गुणा) × 2

Duplex of 2 digits : (Product of two digits) × 2

उदाहरण: 15 का द्वन्द्व योग = $(1 \times 5) \times 2 = 10$

Example: Duplex of 15 = $(1 \times 5) \times 2 = 10$

तीन अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग:- पहले और अन्तिम अंक को गुणा कर दो से गुणा कर और उसमें बीच के अंक का वर्ग जोड़ने से द्वन्द्वयोग प्राप्त होता है।

Duplex of 3 digits number: Twice the product of first and the last digit and add the square of middle digit.

उदाहरण: 345 का द्वन्द्व योग = $(3 \times 5) \times 2 + 4^2 = 46$

Example : Duplex of 345 = $(3 \times 5) \times 2 + 4^2 = 46$

चार अंकों की संख्या का द्वन्द्वयोग :- (पहला × चौथा) × 2 + (दूसरा × तीसरा) × 2

Duplex of 4 digits = (First × fourth) × 2 + (Second × third) × 2

जैसे :- 3550 का द्वन्द्व योग = (3 × 0) × 2 + (5 × 5) × 2 = 50

सर्वप्रथम द्वन्द्वयोग के विभिन्न उदाहरणों का अभ्यास करेंगे उसके बाद वर्ग करना बहुत आसान हो जाएगा।

Square of any number becomes easy after doing the practice of duplex.

1.4 द्वन्द्वयोग विधि से दो अंकों का वर्ग करना

1.4 Square of two digits number using Duplex method

उदाहरण / Example 8 : हल करें / Solve 45^2

हल / Solution = 4 का द्वन्द्व योग / 45 का द्वन्द्व योग / 5 का द्वन्द्वयोग
= Duplex (4) / Duplex (45) / Duplex (5)
= $4^2 / 4 \times 5 \times 2 / 5^2$
= 16 / ₄0 / ₂5
= 2025

उदाहरण / Example 9 : हल करें / Solve 92^2

हल / Solution = $9^2 / 9 \times 2 \times 2 / 2^2$
= 81 / ₃6 / 4
= 8464

उदाहरण / Example 10 : हल करें / Solve 342^2

हल / Solution = 3 का द्वन्द्वयोग / Duplex (3)

34 का योग द्वन्द्वयोग Duplex 34	342 का योग द्वन्द्वयोग Duplex 342	42 का योग द्वन्द्वयोग Duplex 42	2 का योग द्वन्द्वयोग Duplex 2
---------------------------------------	---	---------------------------------------	-------------------------------------

= 9 / ₂4 / ₂8 / ₁6 / 4
= 116964

उदाहरण / Example 11 : हल करें / Solve 612^2

हल / Solution = 6 / 61 / 612 / 12 / 2 / इन सभी अंकों का द्वन्द्व योग करेंगे। (Do (do duplex of all these groups)

$$= 36 / {}_1 2 / {}_2 5 / 4 / 4$$

$$= 374544$$

उदाहरण / Example 12 : हल करें / Solve 4352^2

हल / Solution = 4 / 43 / 435 / 4352 / 352 / 52 / 2

इन सभी अंकों का द्वन्द्व योग करेंगे। (do duplex of all these groups)

$$= 16 / {}_2 4 / {}_4 9 / {}_6 6 / {}_3 7 / {}_2 0 / 4$$

$$= 18939904$$

अभ्यास माला / EXERCISE-1.1

द्वन्द्व योग विधि से वर्ग करें :-

Square using Duplex Method

(1) 42 (2) 65 (3) 64 (4) 44 (5) 33 (6) 72

अभ्यास माला / EXERCISE-1.2

यावदूनं विधि से वर्ग करें :-

Square using Yavadunam Method

(1) 106 (2) 1023 (3) 10025 (4) 995 (5) 984 (6) 978

अभ्यास माला / EXERCISE-1.3

द्वन्द्व योग विधि से वर्ग करें :-

Square using Duplex Method

(1) 135 (2) 312 (3) 334 (4) 452 (5) 316 (6) 712

अध्याय-2

Chapter - 2

वर्गमूल

Squareroot

2.1 वर्गमूल का वैदिक गणित सूत्र-विलोकनम :- किसी भी पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल विलोकनम विधि से ज्ञात किया जा सकता है।

2.1 Square root using Vedic Mathematics Sutra Vilokanam : Square root of any perfect square number can be done using Vilokanam Sutra.

संख्यायें Numbers	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
वर्ग Square	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

वर्ग संख्या में इकाई अंक / (Unit digit in square numbers) :

(i) पूर्ण वर्ग संख्या के इकाई अंक में 1, 4, 5, 6, 9 आना निश्चित है। अतः इकाई अंक 2, 3, 7 और 8 हो तो संख्या पूर्ण वर्ग नहीं होगी।

There must be 1, 4, 5, 6, 9 in perfect square numbers. If 2, 3, 7, 8 are in the unit digit, then number cannot be perfect square.

(ii) किसी संख्या का बीजांक 1 से 9 तक हो सकता है पर वर्ग संख्या का बीजांक 1, 4, 7, 9 में से हो सकता है। अतः बीजांक 2, 3, 5, 6, 8 हो तो वह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है।

Beejank of any number are from 1 to 9 But Beejank of perfect number can be 1, 4, 7 and . If the Beejank are 2, 3, 5, 6, 8 these numbers can not perfect square numbers

(iii) वर्ग संख्या में दो, चार, छः आदि शून्य आ सकते हैं। संख्या के अन्त में एक या तीन या पाँच आदि शून्य हो तो वह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं होगी। जैसे :- 1000, 25000 आदि।

In perfect square numbers, there are even number of zero's. If the number of zero's are in odd in the number, then these numbers can not be perfect square.