VEDIC MATHEMATICS

7

वैदिक गणित

द्वितीय संस्करण की भूमिका

वैदिक गणित की पाठ्यक्रम के अनुसार कक्षाशः पुस्तकें काफी उपयोगी सिद्ध हुई हैं। इस हेतु लेखक मण्डल के लोग अत्यन्त आभारी हैं। प्रथम संस्करण में कुछ सुधार करने की आवश्यकता हुई जिससे 13-01-2016 को कुरुक्षेत्र में श्री राकेश भाटिया (प्रान्त प्रमुख वैदिक गणित, हरियाणा), श्री गुलशन छाबड़ा (प्रान्त वैदिक गणित सह-प्रमुख, हरियाणा), श्री राजेन्द्र कुमार (प्रान्त वैदिक गणित प्रमुख, दिल्ली), श्री राकेश मलिक (सह प्रान्त वैदिक गणित प्रमुख, दिल्ली) और श्री गोपाल दास शर्मा (हिमाचल) उत्तर क्षेत्र वैदिक गणित प्रमुख, विद्या भारती उत्तर क्षेत्रीय मन्त्री श्री सुरेन्द्र अत्री के मार्गदर्शन में बैठे थे।

वैदिक गणित की इस पुस्तक में मूल रूप से परिवर्तन नहीं किया गया है। कुछ सुधार किया गया है तथा 16/12/2018 को वैदिक गणित की उत्तर क्षेत्र की टोली की बैठक कुरुक्षेत्र में हुई जिसमें वैदिक गणित की पुस्तकों का लेखन कार्य हिंदी व अंग्रेजी दोनों भाषाओं में किया गया। इसमें श्री देवेन्द्र सिंह यादव (सह प्रान्त प्रमुख, दिल्ली), श्री विकास शर्मा (प्रान्त टोली सदस्य, हरियाणा), श्रीमती मंजुला (प्रान्त टोली सदस्य, हरियाणा), श्री महेश चंद शर्मा (प्रान्त प्रमुख, पंजाब), श्री कांशी नाथ रैना (प्रान्त प्रमुख, जम्मू-कश्मीर) का सहयोग भी प्राप्त हुआ।

पुस्तक में सुधार करने के लिए यथासम्भव प्रयास किए गए है फिर भी यदि किसी सुधार की आवश्यकता ध्यान में आए अथवा अन्य कोई सुझाव हो तो निश्चित ही दें ऐसा अनुरोध है।

गोपाल दास शर्मा
क्षेत्रीय वैदिक गणित प्रमुख
विद्या भारती उत्तर क्षेत्र

लेखक मण्डल

गोपाल दास शर्मा	क्षेत्रीय वैदिक गणित प्रमुख, विद्या भारती, उत्तर क्षेत्र कुरुक्षेत्र
राकेश भाटिया	वैदिक गणित प्रान्त प्रमुख, विद्या भारती हरियाणा, कुरुक्षेत्र
राजेन्द्र पाल शर्मा	प्रान्त वैदिक गणित प्रमुख, विद्या भारती, दिल्ली
राकेश मलिक	प्रान्त वैदिक गणित सह-प्रमुख, विद्या भारती, दिल्ली
गुलशन छाबड़ा	प्रान्त वैदिक गणित सह-प्रमुख, विद्या भारती हरियाणा, कुरुक्षेत्र

वैदिक गणित के सोलह सूत्र एवं उनके अर्थ

1. एकाधिकेन पूर्वेण – पहले से एक अधिक के द्वारा।
   By one more than the previous one.
2. निखिलं नवतश्चरतमं दशतः – सभी नौ में से परन्तु अन्तिम दस में से।
   All from nine and last from ten.
3. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् – सीधे (खड़े) और तिरछे दोनों प्रकार से।
   Vertically and Crosswise.
4. परावर्त्य योजयेत् – पक्षान्तरण कर उपयोग करें।
   Transpose and apply.
5. शून्यं साम्यसमुच्चये – समुच्चय समान होने पर शून्य होता है।
   When the 'Samuchaya's are the same, that 'Samuchaya' is zero.
6. आनुरूप्ये शून्यमन्यत् – अनुरूपता होने पर दूसरा शून्य होता है।
   If one is in ratio, the other one is zero.
7. संकलनव्यवकलनाभ्याम् – जोड़कर और घटाकर।
   By addition and subtraction.
8. पूरणापूरणाभ्याम् – अपूर्ण को पूर्ण करके।
   By completing.
9. चलनकलानाभ्याम् – चलन–कलन के द्वारा
   By Calculus
10. यावदूनम् – जितना कम है अर्थात् विचलन।
    The Deficiency
11. व्यष्टिसमष्टिः – एक को पूर्ण और पूर्ण को एक मानते हुए।
    Whole as one and one as whole.
12. शेषाण्यङ्केन चरमेण – अंतिम अंक से अवशेष को।
    Remainder by the last digit.
13. सोपान्त्यद्वयमन्त्यम् – अन्तिम और उपान्तिम का दुगुना।
    Ultimate and twice the penultimate.
14. एकन्यूनेन पूर्वेण – पहले से एक कम के द्वारा
    By one less than the Previous one.
15. गुणितमुच्चयः – गुणितों का समुच्चय।
    The whole Product.
16. गुणकसमुच्चयः – गुणकों का समुच्चय।
    Set of Multipliers.

उपसूत्र

1. आनुरूप्येण – नुरुपता के द्वारा।
   Proportionately.
2. शिष्यते शेषसंज्ञः – बचे हुए को शेष कहते है।
   The remainder is the constant
3. आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन – पहले को पहले से, अंतिम को अंतिम से।
   First by the first and last by the last.
4. केवलैः सप्तकं गुण्यात् – क, व, ल से 7 का गुणा करें।
   Multiply 'ka' (1), 'va' (4), 'la' (3) by 7 (Formula for 1/7).
5. वेष्टनम् – विभाजनीयता परीक्षण की एक विशिष्ट क्रिया का नाम
   The osculation. (A method for divisibility test.)
6. यावदूनं तावदूनम् – जितना कम उतना और कम।
   What ever deficiency further lessen that much.
7. यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्गं – जितना कम उतना और कम करके वर्ग की योजना च योजयेत् भी करें।
   Lesser by the deficiency and add its square.
8. अन्त्ययोर्दशकेऽपि – अंतिम अंको का योग दस।
   Sum of last digits is ten.
9. अन्त्ययोरेव – केवल अंतिम द्वारा।
   Only by the last.
10. समुच्चयगुणितः – सर्व गुणन।
    Product of whole.
11. लोपनास्थापनाभ्याम् – विलोपन एवं स्थापना द्वारा।
    By Elimination and retention.
12. विलोकनम् – अवलोकन द्वारा।
    By observing.
13. गुणितसमुच्चयः समुच्चयगुणित – गुणांक के समूहों का गुणनफल और गुणनफल के गुणांको को योग समान होगा।
    Product of the whole is equal to whole of the product.

अन्य विशिष्ट संकल्पनाएँ –

1. द्वन्द्वयोग – द्वयात्मक। (Duplex)
2. शुद्ध – शोधित राशि। (Purity)
3. ध्वजांक – घात के स्थान का अंक। (Flag digit)

कक्षा - सप्तमी

अनुक्रमणिका

क्रमांक	विषय	पृष्ठ क्रमांक
1.	बीजांक ज्ञात करना तथा बीजांक द्वारा उत्तर की जाँच करना (Beejank and Check by Beejank)	5
2.	एकन्यूनेन पूर्वेण (Multiplication (Ekanyunena Purvena)	10
3.	गुणन (ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्) (Multiplication - Sutra-Urdhvatiryagbhyam)	12
4.	गुणन (सूत्र-निखिलम्) (Multiplication-Sutra-Nikhilam)	14
5.	भाग (सूत्र-ध्वजांक) (Division-Sutra-Dhvajank)	21
6.	वर्ग (एकाधिकेन पूर्वेण) (Square-Ekadhikena Purvena)	26
7.	आवर्त दशमलव भिन्न (Decimal Fraction)	28
8.	सरल समीकरण का हल (Solution of Simple Equation)	30
9.	बीजगणितीय गुणन (Algebraic Multiplication)	32
10.	बीजगणितीय गुणनखण्ड (Algebraic Factorization)	34
11.	बीजगणित में महतम समापवर्तक (H.C.F. in Algebra)	38
12.	क्षेत्रमिति (Mensuration)	40
13.	घन और घनाभ (Cube and Cuboid)	43
14.	भारतीय गणितज्ञ-महावीराचार्य (Indian Mathematician-Mahaviracharya)	46
15.	भारतीय गणितज्ञ-स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ (Indian Mathematician-Swami Bharti Krishan Tirth)	51

अध्याय-1
Chapter - 1

बीजांक ज्ञात करना तथा बीजांक द्वारा उत्तर की जाँच करना
Beejank and check by Beejank

1.1 **बीजांक :-** किसी संख्या का बीजांक ज्ञात करने के लिए उस संख्या के अंकों का योग जब तक करते हैं जब तक एक अंक प्राप्त हो जाए।

1.1 **Beejank :** The sum of a the digit of a number into a single digit is known as Beejank

उदाहरण 1 :- 10, 21, 321, 78 के बीजांक ज्ञात कीजिए।

हल :- 10 का बीजांक 1+0 = 1

21 का बीजांक 2+1 = 3

321 का बीजांक 3+2+1 = 6

78 का बीजांक 7+8 = 15 यहाँ 15 प्राप्त हुआ है जो बीजांक नहीं अत: इसके अंको को पुन: जोड़ेंगे 1+5 = 6

Example 1 : Find the Beejank of 10, 21, 321, 78

Solution : Beejank of 10 = 1

Beejank of 21 = 2+1=3

Beejank of 321 = 3+2+1=6

Beejank of 78= 7+8 = 15 = 1+5 =6

उदाहरण 2 :- 7 8 6 5 का बीजांक ज्ञात कीजिए।

Example 2 : Find the beejank of 7865.

हल :- 7+8+6+5 → 26 →2+6 → 8 बीजांक

Solution : Beejank of 7865 = 7+8+6+5 = 2+6 = 8

सकेत 1. जहाँ बीजांक ज्ञात करते समय दो अंक प्राप्त हों वहाँ तुरन्त जोड़कर एक अंक प्राप्त कर लेना चाहिए।

Hint : If the result is two number then add the digit again to find the beejank.

2. शून्य और नौ को जोड़ने या छोड़ने से बीजांक में कोई अन्तर नहीं आता।
By adding or subtracting 0 and 9, the beejank is unaffected.

3. किसी संख्या का बीजांक उस संख्या में 9 से भाग देने पर बचने वाले (शेष) के बराबर होता है। बीजांक ज्ञात करने का अर्थ है उस संख्या में 9 से भाग देने पर कितना शेष बचेगा यह ज्ञात करना।

   To dividing a number by 9 the remainder is its beejank. To find the beejank means what will be remainder when a number is divided by 9.

4. किसी संख्या का बीजांक 9 है। अत: वह 9 से पूरी-पूरी विभाजित होगी।

   If beejank is 9, it means the whole number is divisible by 9.

5. बीजांक (9 से शेष) मौखिक ही ज्ञात करना है।

   To find the beejank orally.

6. बीजांक (9 से शेष) से उत्तर की जाँच की जा सकती है, अत: इसका ..... अभ्यास करना चाहिए।

   To check the answer by beejank

उदाहरण 3 :- 3241 इस संख्या को 9 से भाग देने पर कितना शेष बचेगा?

Example 3 : What will be the remainder when 3241 is divided by 9?

हल :- 3241 का बीजांक $3+2+4+1 \rightarrow 10 \rightarrow 1+0 \rightarrow 1$ इसका बीजांक 1 है। अत: इस संख्या में 9 से भाग देने पर शेष 1 बचेगा।

Solution : Beejank of 3241 is 3+2+4+1= 10 = 1+0 = 1. So when 3241 is divided by 9 the remainder is 1.

अभ्यास माला / EXERCISE-1.1

निम्नलिखित संख्याओं में 9 से भाग देने पर कितना शेष बचेगा :-

Find the remainder when divided by 9 in the following numbers :

(1) 32	(2) 44	(3) 47	(4) 58
(5) 70	(6) 87	(7)	(8) 999
(9) 4567	(10) 2372		

अभ्यास माला / EXERCISE–1.2

निम्नलिखित में से कौन-कौन सी संख्याएँ 9 से विभाजित होती हैं।

Which number is divisible by 9 in the following numbers.

(1) 234 (2) 456 (3) 535 (4) 9999 (5) 197

(6) 581 (7) 901 (8) 1234 (9) 3272 (10) 2322

1.2 बीजांक द्वारा उत्तर की जाँच :-

यदि संख्याओं के बीजांकों के योग उत्तर का बीजांक बराबर हो तो उत्तर सही होगा।

1.2 Answer check by beejank method

The answer is correct if sum of beejank of numbers is equal to beejank of answer.

उदाहरण 4 :-

जोड़ की जाँच

संख्यायें	बीजांक
3 4 6	4
2 2 2	6
+ 1 2 3	6
6 9 1	7

जाँच :-

संख्याओं का बीजांकों के योग का बीजांक।

4+6+6 → 16 →1+6 → 7

उत्तर :- 691 का बीजांक

6+9+1 → 16 →1+6 → 7

अर्थात् उत्तर सही है।

Example 4

Numbers	Beejank
3 4 6	4
2 2 2	6
+ 1 2 3	6
6 9 1	7

Check :

Beejank of sum of beejank of numbers

4+6+6=16 = 1+7 =7

Beejank of answer 691

6+9+1=6=1+6=7

Both beejanks are equal. It means answer is correct

घटाने की जाँच :-

उदाहरण 5 :-

संख्यायें	बीजांक
7 8 1	7
– 3 2 5	1
4 5 6	6

जाँच :-

7–1 = 6

उत्तर का बीजांक :- 4+5+6 = 15, 1+5 = 6

Check method for subtraction

Example 5

Numbers	Beejank
7 8 1	7
- 3 2 5	1
4 5 6	6

Check :

7-1 = 6

Beejank of answer = 4 + 5 + 6 = 15, 1+5=6

गुणा की जाँच :- यदि प्रथम संख्या का बीजांक × द्वितीय संख्या का बीजांक गुणनफल का बीजांक बराबर है तो उत्तर सही है।

Check method for multiplication : If beejank of (Beejank first number x beejank of second number) is equal to beejank of answer then answer is correct.

उदाहरण 6 :-
Example

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ 142 \\ \hline 17182 \\ \hline \end{array}$$

बीजांक का गुणन व बीजांक = $4\times7 = 28$

Multi plication of beejank and its beejank $2+8 = 10 \rightarrow 1+0 \rightarrow 1$

उत्तर का बीजांक बीजांक = Beejank of Answer $1+7+1+8+2 = 19 \rightarrow 1+9=10 \rightarrow 1+0 \rightarrow 1$

जाँच :-प्रथम संख्या का बीजांक × द्वितीय संख्या का बीजांक), प्राप्त गुणनफल का बीजांक = उत्तर का बीजांक $4\times7 = 28$ बीजांक 1 है। उत्तर का बीजांक भी 1 है। अत: उत्तर सही है।

Check : Beejank of (Beejank of first number x beejank of second number) = beejank of (4x7=28)=1 and answer beejank is also 1. Hence the answer is correct.

1.3 भाग की जाँच की विधि :- 383÷12

जाँच :-भाज्य का बीजांक = भागफल का बीजांक × भाजक का बीजांक + शेषफल का बीजांक

भाजक) भाज्य (भागफल

अथवा 5 = (4×3)+2
= 12+2 = 14
= 5 उत्तर, अर्थात् उत्तर सही है।

$$\begin{array}{r|l} 12 & 383 \ ) \ 31 \\ & -36 \\ \hline & 23 \\ & -12 \\ \hline & 11 = \text{शेषफल} \\ \hline \end{array}$$

Check method for division : 383 ÷ 12

Check : beejank of divisor = beejank of quotient x beejank of dividend + remainder

$$12 \overline{)\ 383\ } 31$$

$$-36$$

$$23$$

$$-12$$

$$11 = \text{remainder}$$

$= (4 \times 3) + 2$

$= 12 + 2 = 14$

$= 5$ hence answer is correct

अध्याय-2
Chapter - 2

एकन्यूनेन पूर्वेण
Multiplication (Ekanyunena Purvena)

2.1 सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण : इस सूत्र का प्रयोग तब करते हैं जब एक संख्या नौ अंको की बनी हो। इसमें तीन स्थितियाँ हैं – जब गुणक और गुण्य में :-

2.1 Formula Eknyunena Purvena : this method is used when multiplier is 9, 99, 999, ... This method can be divided into three parts.

(1) दोनों संख्याओं में अंकों की संख्या बराबर हो।

Equal number 9 digit in multiplicand and multiplied.

(2) 9 अंकों वाली संख्या में अधिक अंक हो।

Lesser number 9 digits in multiplicand.

(3) 9 अंकों वाली संख्या कम हो

Multiplicand with greater number of 9 digits.

उदाहरण 1 :- हल करें 63×99

(1) उत्तर का बायाँ भाग: एकन्यूनेन पूर्वेण सूत्र से $63-1 = 62$

(2) उत्तर का दायां भाग : $99 - 62$

$= 6237$ उत्तर

Example 1 : Solve 63 x 99

1) Left part of answer using Ekanyunena Purvena formula 63-1 = 62

2) Right part of answer : 99-62 = 37

= 62/37

= 6237

उदाहरण 2 :- हल करें 34523×99999

$= 34522/65477$

$= 3452265477$ उत्तर

Example 2 : Solve 34523 x 99999

= 34522/65477

= 3452265477